Chapitre 22 : Équations différentielles linéaires

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 1.1.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Une équation linéaire résolue d'ordre n est une équation de la forme

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \tag{É}$$

  où $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ et $b : I \to \mathbb{C}$ sont des fonctions continues.

- Résoudre cette équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions $f \in D^n(I;\mathbb{C})$ telles que

$$\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)f^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)f'(x) + a_0(x)f(x) = b(x)$$

  L'équation différentielle (É) est dite homogène si le second membre b est nul.

- L'équation homogène associée à (É) est

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{ÉH}$$

Remarque : L'équation (É) est dite linéaire car elle ne fait intervenir que des combinaisons linéaires des dérivées de f et résolue car le terme faisant apparaître la plus grande dérivée de y n'est pas multiplié par un coefficient.

Proposition 1.2.

- Toute solution $f : I \to \mathbb{C}$ de l'équation (É) est automatiquement de classe C^n
- Si les coefficients $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ et le second membre b sont des solution lisses, toute solution est automatiquement lisse.

Proposition 1.3 (Principe de superposition)**.**
Soit $f, g \in D^n(I;\mathbb{C})$ deux solutions des équations différentielles

$$\begin{aligned} & y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \\ \text{et} \quad & y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = c(x) \end{aligned}$$

respectivement.
Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Alors $\lambda f + \mu g$ est une solution de l'équation différentielle

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = \lambda b(x) + \mu c(x)$$

Corollaire 1.4.

- L'ensemble $\mathcal{S}_{\text{hom}}$ des solutions de (ÉH) est un sous-espace vectoriel de $D^n(I;\mathbb{C})$
- Si $f_0 \in D^n(I;\mathbb{C})$ est une solution de (É), alors l'ensemble des solution de (É) est

$$\mathcal{S} = \{f_0 + h \mid h \in \mathcal{S}_{\text{hom}}\}$$

  c'est-à-dire un sous-espace affine de $D^n(I;\mathbb{C})$ de direction $\mathcal{S}_{\text{hom}}$
  "Les solutions s'obtiennent comme somme d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène".

1.2 Complément : théorème de Cauchy linéaire

Théorème 1.5.

* Quels que soient $x_0 \in I$ et les nombres complexe $s_0, \dots, s_{n-1} \in \mathbb{C}$, il existe une unique solution $f \in D^n(I;\mathbb{C})$ de (É) telle que

$$f(x_0) = s_0 \quad \text{et} \quad f'(x_0) = s_1 \quad \text{et} \quad f''(x_0) = s_2 \quad \dots \quad \text{et} \quad f^{(n-1)}(x_0) = s_{n-1}$$

* Le sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_{\text{hom}}$ des solutions de (ÉH) est de dimension n
* L'ensemble des solution $\mathcal{S}$ est donc

$$S = f_0 + \mathcal{S}_{\text{hom}} = \{f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n h_n \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n\}$$

  où f_0 est une solution de (É) et où $(h_1, \dots, h_n)$ est une base de solutions de (ÉH).

2 Équation différentielles linéaires d'ordre 1

Dans cette section, on considère une équation

$$y' + a(x)y = b(x) \tag{É}$$

et son équation homogène associé

$$y' + a(x)y = 0 \tag{ÉH}$$

par deux fonctions continues $a, b : I \to \mathbb{C}$

2.1 Équation homogène

Théorème 2.1.

* Soit $a : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue.
  On note $A : I \to \mathbb{C}$ une primitive de a et $h_0 : \begin{cases} I \to \mathbb{C} \\ x \mapsto e^{-A(x)} \end{cases}$
  Alors les solutions de (ÉH) forment l'ensemble

$$\mathcal{S}_{\text{hom}} = \text{Vect}(h_0) = \{\lambda h_0 \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$$

* L'unique solution $f : I \to \mathbb{C}$ de (ÉH) valant s_0 en $x_0 \in I$ est la fonction

$$\begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto s_0 \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt\right) \end{cases}$$

2.2 Solution particulière : quelques heuristiques

Une fois l'équation homogène (ÉH) résolue, il s'agit de trouver une solution particulière à (É).
On verra dans la section ultérieure une méthode générale, mais une première idée est de chercher des solutions "du même type" que le second membre b de (É).

Exemple important :
$$y' + ay = Ae^{rx}$$
avec $a, r \in \mathbb{R}$, dont les solutions homogènes sont les $x \mapsto e^{-ax}$
On peut avoir l'idée de chercher les solutions particulières sous la forme Be^{rx}. Cela marche presque tout le temps, mais on voit déjà que dans le cas $a = r = 0$, la solution particulière est linéaire.
En faite, deux cas se présentent, suivant que $x \mapsto e^{rx}$ est ou non solution de l'équation homogène.

* Si $x \mapsto e^{rx}$ n'est pas solution de l'équation homogène, c'est-à-dire si $a + r \neq 0$, on peut trouver une solution de la forme $f : x \mapsto Be^{rx}$
* En revanche, si $a + r = 0$ (et que $A \neq 0$), on voit que la méthode ci-dessus échoue. On peut en revanche trouver une solution sous la forme $g : x \mapsto Cxe^{rx}$

Cette disjonction de cas correspond au phénomène de la résonance.

2.3 Solution particulière : variation de la constante

Théorème 2.2. Soit A une primitive de a, de sorte que $\mathcal{S}_{\text{hom}} = \text{Vect}\left(x \mapsto e^{-A(x)}\right) = \left\{x \mapsto \lambda e^{-A(x)} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{C}\right\}$
Alors l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ a une solution particulière de la forme $x \mapsto \lambda(x)e^{-A(x)}$, pour une certaine fonction $x \mapsto \lambda(x)$ dérivable.

Corollaire 2.3. Grâce à l'expression intégrale de la primitive, on trouve qu'une solution particulière de (É) est
$$x \mapsto \left(\int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}\,dt\right) e^{-A(x)}$$
où $x_0 \in I$ est un point quelconque.

2.4 Résultat général

Théorème 2.4. Les solutions de (É) sont les fonctions de la forme
$$x \mapsto \left(\int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}\,dt\right) e^{-A(x)} + \lambda e^{-A(x)} = \left(\lambda + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}\,dt\right) e^{-A(x)}$$
où λ décrit l'ensemble des nombres complexes.

Corollaire 2.5. Soit $s_0 \in \mathbb{C}$. L'équation (É) a une unique solution valant s_0 et x_0

3 Équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 2

Dans cette section, on considère une équation
$$y'' + \alpha y' + \beta y = b(x) \qquad \text{(É)}$$
où α, β et $b \in C^0(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Il s'agit donc d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

3.1 Équation homogène

Intéressons-nous d'abord à l'équation homogène associée.

$$y'' + \alpha y' + \beta y = 0 \tag{Éh}$$

Le théorème de Cauchy linéaire entraîne que l'ensemble $\mathcal{S}_{\text{hom}}$ de ses solutions est un sous-espace vectoriel possédant une base à deux éléments de $D^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ - et même de $C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$, comme les coefficients sont (constants donc) lisses.

Comme dans le cas des suites récurrentes, le comportement dépend des solutions du polynôme caractéristique $P = X^2 + \alpha X + \beta$

Théorème 3.1.

- Si le polynôme caractéristique P possède deux racines simples ρ et $\sigma \in \mathbb{C}$, alors

$$\mathcal{S}_{\text{hom}} = \{x \mapsto \lambda e^{\rho x} + \mu e^{\sigma x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\} = \text{Vect}(x \mapsto e^{\rho x}, x \mapsto e^{\sigma x})$$

- Si le polynôme caractéristique P possède une racine double $\rho \in \mathbb{C}$, alors

$$\mathcal{S}_{\text{hom}} = \{x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{\rho x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\} = \text{Vect}(x \mapsto e^{\rho x}, x \mapsto x e^{\rho x})$$

Lemme 3.2. Soit $\alpha, \beta, \tau \in \mathbb{C}$ et $f \in D^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$
Alors f est solution de (ÉH) si et seulement si $g : x \mapsto e^{\tau x} f(x)$ est solution de

$$y'' + (\alpha - 2\tau)y' + (\beta - \alpha\tau + \tau^2)y = 0 \tag{ÉH$_\tau$}$$

Corollaire 3.3. Soit $s_0, s_1 \in \mathbb{C}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$
Il existe une unique solution f de (ÉH) telle que $f(x_0) = s_0$ et $f'(x_0) = s_1$

Théorème 3.4. On suppose ici les coefficients α, β réels. Les solutions de l'équation différentielle sont

- Si P a deux racines réelles $\rho \neq \sigma$:

$$\mathcal{S}_{\text{hom}} = \{x \mapsto \lambda e^{\rho x} + \mu e^{\sigma x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\} = \text{Vect}(x \mapsto e^{\rho x}, x \mapsto e^{\sigma x})$$

- Si P a une racine double (nécessairement réelle) ρ :

$$\mathcal{S}_{\text{hom}} = \{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{\rho x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\} = \text{Vect}(x \mapsto e^{\rho x}, x \mapsto x e^{\rho x})$$

- Si P a deux racines imaginaires conjuguées $r \pm is$, avec $r \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\text{hom}} &= \{x \mapsto e^{rx}(\lambda \cos(sx) + \mu \sin(sx)) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\} \\ &= \text{Vect}(x \mapsto e^{rx}\cos(sx),\ x \mapsto e^{rx}\sin(sx))\end{aligned}$$

Théorème 3.5. Les solutions à valeurs réelles de (ÉH) sont les fonctions décrites par le théorème précédente, où le couple (λ, μ) appartient à $\mathbb{R}^2$

3.2 Solution particulière : quelques heuristiques

Le principe de superposition entraîne que les solutions de (É) forment l'ensemble

$$\mathcal{S} = \{f_0 + h \mid h \in \mathcal{S}_{\text{hom}}\}$$

Pour résoudre complètement (É), il suffit donc maintenant d'en trouver une solution particulière. Deux cas sont au programme : celui d'un second membre exponentiel et celui d'un second membre sinusoïdal, qui s'y ramène.

Proposition 3.6. Considérons l'équation

$$y'' + \alpha y' + \beta y = Ae^{rx} \tag{É}$$

où $A, r \in \mathbb{C}$, de polynôme caractéristique $P = X^2 + \alpha X + \beta$. Alors

* Si r n'est pas racine de P, (É) a une solution particulière de la forme

$$x \mapsto Ce^{rx}$$

* Si r est une racine simple de P, (É) a une solution simple de la forme

$$x \mapsto Cxe^{rx}$$

* Si r est une racine double de P, (É) a une solution simple de la forme

$$x \mapsto Cx^2e^{rx}$$